روندیابی هیدروگراف سیل با کاربرد مدل موج هارمونیک-پریودیک

محمدرضا بهشتی– دانشجوی کارشناسی ارشد سازه های آبی دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم و تحقیقات تهران – کارشناس منابع آب
نصرا... جواهری – دکترای سازه های آبی

چکیده :

سیل بعنوان یکی از مهمترین سوانح طبیعی همواره مورد توجه بشر بوده و در سالهای اخیر با توجه به توسعه مراکز جمعیتی ،صنعتی، کشاورزی و افزایش خسارت ناشی از سیل ، لزوم توجه بیشتر به آن احساس می گردد. یکی از مسائل عمده در مهندسی رودخانه که اغلب هر مهندس هیدرولیک به ناچار با آن سر و کار پیدا خواهد کرد عبارتست از پیش بینی چگونگی طغیان و فروکش سیل در نقطه مشخصی از رودخانه و تغییراتی که در اثر این حرکت در شکل و ارتفاع سیل بوجود می آید .

روندیابی سیل یکی از مسائل مربوط به جریانهای غیردائمی است که از اهمیت خاصی برخوردار بوده و برای حل آن می توان از روشها و تکنیکهای مختلف هیدرولیکی و هیدرولوژیکی استفاده نمود.

در این مقاله سعی شده تا یک مدل ریاضی جدید برای روندیابی سیلاب در رودخانه معرفی گردد.مدل ریاضی مذکور از مشتق گیری مدل موج هارمونیک – پریودیک در جهت زمان و مکان و تبدیل آن به معادله دیفرانسیل مدل موج هارمونیک بدست آمده است.به منظور تعیین ضرایب مدل موج هارمونیک – پریودیک از حل همزمان معادلات انفصالی مدل توسط روشهای

عددی explicit و implicit استفاده می شود.و سپس روابط مناسب بین ضرایب این معادله با تغییرات دبی در سیستم محاسبه می شود.از این مدل می توان در کلیه مطالعات روندیابی سیل از جمله در سیستم های هشدار سیل یا روندیابی سیلاب در مخازن سدها بهره جست. ویژگی بارز این مدل بر مدلهای هیدرولیکی روندیابی سیل ، عدم نیاز به اطلاعات مشخصات هندسی مسیر عبور سیل می باشد.همچنین مشخصه بارز این مدل بر مدلهای روندیابی هیدرولوژیکی ،بخصوص روندیابی هیدرولوژیکی جریان در رودخانه، محاسبه ذخیره جریان بصورت غیر خطی است.در واقع در روش پیشنهادی ضرایب مدل با استفاده از داده های اندازه گیری شده موج سیل عبوری در بازه موردنظر اندازه گیری و محاسبه می شوند. براساس نتایج بدست آمده می توان گفت که این روش علاوه بر صرف وقت و هزینه کمتر نسبت به مدلهای دیگر مانند مدل ماسکینگهام از دقت قابل قبولی برخوردار است.

واژه های کلیدی:

سیلاب - روندیابی- مدل ریاضی - روشهای عددی- موج هارمونیک پریودیک.

مقدمه

روندیابی سیل یکی از مسائل مربوط به جریانهای غیردائمی است که از اهمیت عملی خاصی برخوردار است.روشهای روندیابی سیل به طور کلی به دو دسته عمده روشهای هیدرولیکی و روشهای هیدرولوژیکی تقسیم می شوند.در مدلهای هیدرولیکی معادلات هیدرولیکی جریان در مسیر حل می شوند حال آنکه در مدلهای هیدرولوژی اساس روندیابی جریان بر مبنای مدل بیلان می باشد.در این مقاله سعی شده تا یک مدل ریاضی جدید برای روندیابی سیلاب معرفی گردد.مدل ریاضی مذکور از مشتق گیری مدل موج هارمونیک- پریودیک در جهت زمان و مکان و تبدیل آن به معادله دیفرانسیل مدل موج هارمونیک بدست آمده است. ویژگی بارز این مدل بر مدلهای هیدرولیکی روندیابی سیل ، عدم نیاز به اطلاعات مشخصات هندسی مسیر عبور سیل می باشد.همچنین مشخصه بارز این مدل بر مدلهای روندیابی هیدرولوژیکی،بخصوص روندیابی هیدرولوژیکی جریان در رودخانه، محاسبه ذخیره جریان بصورت غیر خطی است.

مدل پیشنهادی در مطالعه حاضر

لئوپولد و لانگبین(۱۹۷۶) از یک مدل موج هارمونیک برای بررسی ریاضی پلان رودخانه های مئاندری استفاده نمودند[۶]. مدل موج هارمونیک-پریودیک توسط Odgaard (۱۹۸۹) برای پیش بینی تغییر مسیر رودخانه های مئاندری مورد استفاده قرار گرفت[۷].حبیبی و جواهری (۱۳۸۲) از مدل موج هارمونیک-پریودیک با دامنه متغیر برای پیش بینی تغییر مورفولوژی رودخانه قزل اوزن در توسعه یافتگی های اولیه(ساده) استفاده نمودند [۲].جواهری (۱۳۸۴) مدل موج هارمونیک-پریودیک با زاویه متغیر را برای پیش بینی پلان رودخانه کارون در توسعه یافتگی های کم تا پیچیده (complex) بکار گرفت.جواهری،کاشفی پور و قمیشی (۲۰۰۵) از مدل موج هارمونیک برای بررسی تغییر مورفولوژی رودخانه های مئاندری مدل موج هارمونیک پریودیک را در ترکیب با یک مدل آماری زمانی بکار گرفتند[۸]. معادله کلی موج هارمونیک-پریودیک(معادله۳) از ادغام دو معادله موج هارمونیک(معادله۱) و موج پریودیک(معادله۲) حاصل شده است. در یک موج هارمونیک سرعت انتقال موج یعنیCبرابر صفر بوده و تنها دامنه موج A با گذشت زمان تغییر خواهد نمود.اما در یک موج پریودیک دامنه انتقال موج همواره ثابت بوده و مقدار سرعت انتقال موج تغییر می کند.حال آنکه در یک موج هارمونیک - پریودیک هم سرعت انتقال موج و هم دامنه موج هر دو نسبت به مکان و زمان متغیر هستند. ازآنجایی که امواج سیلاب عبوری از رودخانه دارای خصوصیات تقریباً مشابهی با موج هارمونیک - پریودیک هستند، لذا با داشتن مشخصات هیدروگراف سیلاب در نقطه ای از رودخانه می توانیم هیدروگراف سیل را در نقطه دیگر در پایین دست رودخانه تخمین با این روش تخمین بزنیم.

فرم عمومی معادلات نامبرده بصورت زیر می باشد:

موج هارمونیک

$$C=0 \rightarrow Y(x,t)=A(t)\sin(K.x) \qquad (۱)$$

موج پریودیک

$$A=cte \rightarrow Y(x,t)=A.\sin[K(x-Ct)] \qquad (۲)$$

موج هارمونیک پریودیک

$$Y(x,t)=A(t)\sin[K(x-Ct)] \qquad (۳)$$

که در معادلات فوق:

$\frac{2\pi}{T}$ =C→ سرعت انتقال موج

$K=\frac{2\pi}{\lambda}$

A (t) = دامنه موج

T = دوره تناوب موج

λ = طول موج

معادله (۳) را می توان بصورت زیر نیز نوشت:

$$\sin[K(x-Ct)]=\frac{y}{A(t)} \qquad (۴)$$

معادله (۴) را می توان به یک معادله دیفرانسیلی جزئی تبدیل نمود و برای هر پدیده نوسانی سینوسی با زمان مورد استفاده قرار داد.با مشتق گیری از معادله موج هارمونیک - پریودیک (معادله۳) نسبت به متغیرهای t و x روابط زیر حاصل می شوند:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=KA(t)\cos[K(x-Ct)] \qquad (۵)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=A'(t)\sin[K(x-Ct)]-K.C.A(t).\cos[K(x-Ct)] \qquad (۶)$$

اگر مقادیر $\sin[K(x-Ct)]$ و $\cos[K(x-Ct)]$ را از معادلات (۴) و (۵) در معادله (۶) جایگزین کنیم، معادله زیر حاصل می شود:

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{A'(t)}{A(t)}y-C\frac{\partial y}{\partial x} \qquad (۷)$$

یا

$$\frac{\partial y}{\partial t}+C\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{A'(t)}{A(t)}y \qquad (۸)$$

در واقع این معادله دیفرانسیلی جزئی ،فرم عمومی معادله موج‌سینوسی‌است‌که‌می‌توان‌آن‌راباجایگزینی $P=\frac{A'(t)}{A(t)}$ بصورت زیر خلاصه نمود:

$$\frac{\partial y}{\partial t}+C\frac{\partial y}{\partial x}=Py \qquad (۹)$$

تغییرات هیدروگراف سیل در طول بازه معینی از رودخانه را می توان با استفاده از معادله فوق که تابعی از متغیرهای t و x می باشد، تعیین نمود.
برای بدست آوردن جواب یک معادله دیفرانسیل جزئی به مجموعه ای از شرایط مکمل نیاز است تا توابع اختیاری حاصل از حل معادله دیفرانسیلی جزئی را معین کنیم. شرایط یاد شده به عنوان شرایط اولیه و شرایط مرزی تقسیم بندی می شوند که برای معادله (۹) این شرایط عبارتند از:

شرط مرزی → $y_i^n = y_i^{n+1}$, for i = ۱

شرط اولیه → $y_i^n =$ هیدروگراف ورودی

حل عددی مدل پیشنهادی

معادله(۹) را می توان با استفاده از روشهای عددی explicit و implicit حل نمود.برای هر دو نوع راه حل و برای هر نقطه از هیدروگراف سیل(x_i ,y_i) روابط زیر حاکم است:

$$\Delta t = tp_I - tp_o \qquad (۱۰)$$

$$\Delta x = t_2 - t_1 \qquad (۱۱)$$

که tp_I و tp_o به ترتیب عبارتند از زمان وقوع پیک هیدروگراف ورودی و هیدروگراف خروجی به/ از بازه مورد نظر از رودخانه . همچنین Δx نیز نمایانگر فاصله زمانی بین دو نقطه متوالی از هیدروگراف سیل(ورودی یا خروجی) می باشد.
در مطالعه حاضر دو روش عددی برای حل معادله دیفرانسیلی جزیی (۹) استفاده شده است.این دو روش عبارتند از روش Lax explicit و روش implicit Euler. همانطور که می دانیم برای حل یک معادله دیفرانسیلی حاکم ابتدا باید آن را به طریقی به یک معادله جبری تبدیل کنیم .لذا معادله حاکم را باید منفصل یا گسسته کنیم. با توجه به روش Lax فرم گسسته شده

معادله(۹) بصورت زیر می باشد:

(y_i در واقع همان دبی سیلاب عبوری از یک نقطه مشخص از بازه مورد نظر در رودخانه و Δt فاصله زمانی بین پیک هیدروگرافهای ورودی و خروجی می باشد)

$$\frac{y_i^{n+1} - \frac{(y_{i+1}^n + y_{i-1}^n)}{2}}{\Delta t} + C_i^n \frac{y_{i+1}^n - y_{i-1}^n}{2\Delta x} = P_i^n y_i^n \qquad (۱۲)$$

یا

$$y_i^{n+1} = \frac{1}{2}(y_{i+1}^n - y_{i-1}^n) - \frac{1}{2}C_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x}(y_{i+1}^n - y_{i-1}^n) + P_i^n y_i^n \Delta t \qquad (۱۳)$$

که :

$y_i^n =$ دبی هیدروگراف ورودی در زمان i

$y_i^{n+1} =$ دبی هیدروگراف خروجی در زمان i

همچنین معادله(۹) را می توان با استفاده از روشEuler implicit به صورت زیر به یک معادله گسسته تبدیل کرد:

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\Delta t} + C_i^n \frac{y_{i+1}^{n+1} - y_{i-1}^{n-1}}{2\Delta x} = P_i^n y_i^{n+1} \qquad (۱۴)$$

یا

$$y_i^{n+1} = y_i^n - \frac{C_i^n}{2} \times \frac{\Delta t}{\Delta x}(y_{i+1}^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}) + P_i^n y_i^{n+1} . \Delta t \qquad (۱۵)$$

$$\gamma_i^n = C_i^n . \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \text{و} \quad \mu_i^n = P_i^n . \Delta t$$

تحلیل پایداری ون نیون که اغلب برای بررسی پایداری معادلات تفاضل محدود بکار می رود، نشان می دهد که معادله(۱۴) همواره پایدار است و معادله (۱۲) در صورت ارضاء شرط $|\gamma_i^n| \leq 1$ پایدار خواهد بود.

تعیین ضرایب C و P

مهمترین مسئله برای بررسی روند حرکت سیلاب در بازه ای از رودخانه توسط مدل موج هارمونیک-پریودیک عبارتست از تعیین ضرایب این مدل یعنی CوP.این ضرایب با زمان و مکان تغییر خواهند کرد و در نتیجه در هر نقطه از رودخانه این مقادیر متغیر خواهند بود.تخمین دقیق این ضرایب باعث افزایش دقت مدل روندیابی می شود.
در مطالعه حاضر یک روش ساده برای تعیین دقیق ضرایب C و P بکار رفته است.اگر دو روش عددی ذکر شده(معادلات(۱۴) و (۱۲)) را همزمان و با فرض حل عددی پایدار با هم حل کنیم ، روابط زیر برای μ_i^n و γ_i^n بدست خواهد آمد:

$$\gamma_i^n = \frac{y_i^{n+1}(y_{i+1}^n + y_{i-1}^n) + 2y_i^n(y_i^{n+1} - y_i^n) - 2(y_i^{n+1})^2}{y_i^{n+1}(y_{i+1}^n - y_{i-1}^n) - y_i^n(y_{i+1}^{n+1} - y_{i-1}^{n+1})} \qquad (۱۶)$$

$$\mu_i^n = \frac{1}{y_i^{n+1}}\left[(y_i^{n+1} - y_i^n) + \frac{\gamma_i^n}{2}\ (y_i^{n+1} - y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1})\right] \qquad (۱۷)$$

یا

$$\mu_i^n = \frac{(2y_i^{n+1} - 2y_i^n) + \gamma_i^n\ (y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1})}{2y_i^{n+1}} \qquad (۱۸)$$

و در نهایت با معلوم شدن مقادیر μ_i'' و γ_i'' برای کل یک بازه معین از رودخانه ،ضرایب Cو P را با استفاده از معادلات فوق و برای یک سری زمانی از داده های اندازه گیری شده در آن بازه می توان محاسبه نمود.

$$C = \gamma_i'' \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{و} \quad P = \frac{\mu_i''}{\Delta t} \tag{۱۹}$$

بررسی صحت مدل

در اینجا برای بررسی صحت مدل ریاضی ارائه شده به انجام یک مطالعه موردی می پردازیم. محدودهٔ مورد بررسی در استان خوزستان و در شمال شهرستان ماهشهر واقع می‌باشد.اطلاعات مربوط به دبی های ورودی و خروجی بین دو ایستگاه متوالی از یک آبراهه واقع در این منطقه برداشت شده اند ،که مقادیر آنها در جدول (۱) و هیدروگراف های ورودی و خروجی در شکل (۱) ارائه شده است.

برای بررسی صحت مدل ارائه شده ، ابتدا مقادیر γ_i'' و μ_i'' با توجه به معادلات ۱۷ و ۱۸ و دبی ورودی به ایستگاه اول محاسبه شدند.سپس ضرایب معادله(۹)یعنی Cو P را با توجه به رابطه (۱۹) بدست آوردیم. همانطور که می دانیم در حل معادلات تفاضل محدود دو نوع خطا وجود دارد.این خطاها عبارتند از خطای گرد کردن که خاصیت کامپیوتر است و خطای گسسته کردن که ناشی از روش عددی به کار رفته است[۳].اگر خطا در معادله تفاضل محدود کنترل نشود،رشد خطا باعث ناپایداری حل می شود. پس از تعیین ضرایب باید شرط پایداری جواب معادله یعنی $|\gamma_i''| \leq 1$ بررسی شود. در برخی از نقاط شرایط ناپایدار ایجاد می شود.برای غلبه بر این ناپایداری با استفاده از تابع تبدیل سیگما ، هیدروگرافهای ورودی و خروجی را به صورت منحنی های تجمعی(شکل۲) تبدیل و مجدداً مقادیر γ_i'' و μ_i'' محاسبه شدند.و از روی مقادیر γ_i'' و μ_i'' جدید ضرایب C و P مجدداً محاسبه شدند.بدین ترتیب شرط پایداری در اکثر نقاط ارضاء شد.آنگاه دبی های خروجی از ایستگاه دوم طبق معادله موج هارمونیک-پریودیک (معادله۹) شبیه سازی شدند.رابطه بین مقادیر C و P محاسبه شده و مقادیر دبی های ورودی(تجمعی) در شکل های(۳)و (۴) ارائه شده است.

برای محاسبه مقدار خطای شبیه سازی از معادله $e_s = \frac{|Q_{out} - Q_{out\_m}|}{Q_{out\_m}} \times 100$ استفاده شد.

با توجه به نتایج بدست آمده میزان خطای متوسط بین مقادیر دبی خروجی شبیه سازی شده و دبی خروجی مشاهداتی برابر ۰/۵۳ می باشد. همچنین خطای برآورد دبی پیک و دبی پیک مشاهداتی برابر ۲/۹۶ شد.

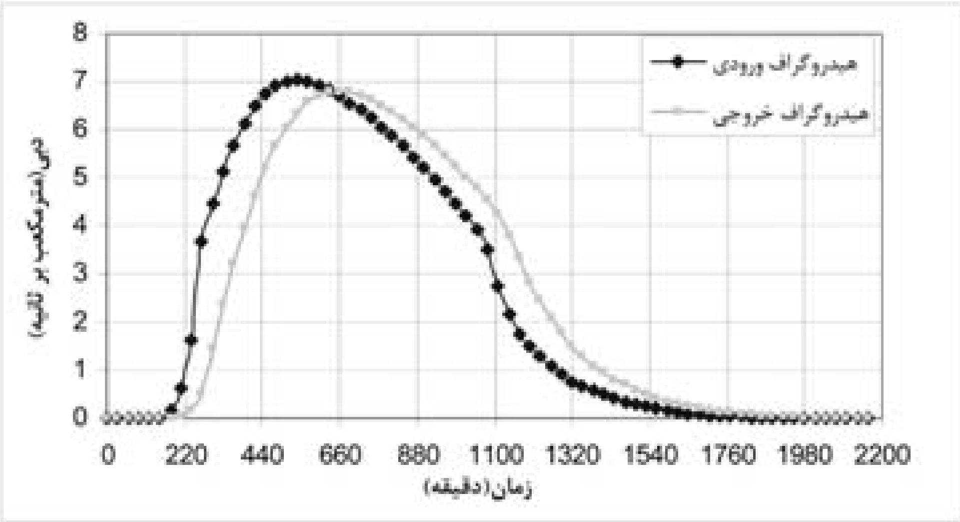
در شکل (۵) هیدروگراف خروجی شبیه سازی شده و هیدروگراف خروجی مشاهداتی از بازه مورد مطالعه ارائه شده است.با مقایسه هیدروگراف خروجی شبیه سازی شده توسط مدل پیشنهادی و مقادیر هیدروگراف خروجی مشاهداتی که در شکل(۶) دیده می شود، این مدل قادر است با دقت مناسب و قابل قبول مقادیر دبی های خروجی را پیش بینی نماید.بدین ترتیب می توان برای سیلاب های احتمالی بعدی در بازه مورد مطالعه، تنها با اندازه گیری دبی های ورودی به آن بازه و داشتن منحنی های $C\text{-}Q_{in}$ و $P\text{-}Q_{in}$ ، مقادیر Cو P متناظر با دبی های ورودی را تعیین و سپس هیدروگراف خروجی از بازه مورد مطالعه از رودخانه را با دقت قابل قبول پیش بینی نمود.

نتیجه گیری

در این مقاله یک مدل جدید برای پیش بینی تغییرات هیدروگراف سیل در یک بازه خاص از رودخانه ارائه

زمان (دقیقه)	دبی ورودی (متر مکعب بر ثانیه)	دبی خروجی (متر مکعب بر ثانیه)	زمان (دقیقه)	دبی ورودی (متر مکعب بر ثانیه)	دبی خروجی (متر مکعب بر ثانیه)	زمان (دقیقه)	دبی ورودی (متر مکعب بر ثانیه)	دبی خروجی (متر مکعب بر ثانیه)	زمان (دقیقه)	دبی ورودی (متر مکعب بر ثانیه)	دبی خروجی (متر مکعب بر ثانیه)
0	0.00	0.00	570	7.00	6.57	1140	2.17	3.81	1710	0.06	0.16
30	0.00	0.00	600	6.93	6.71	1170	1.77	3.32	1740	0.05	0.13
60	0.00	0.00	630	6.83	6.78	1200	1.51	2.85	1770	0.03	0.11
90	0.00	0.00	660	6.71	6.80	1230	1.28	2.44	1800	0.03	0.08
120	0.00	0.00	690	6.56	6.78	1260	1.08	2.09	1830	0.02	0.07
150	0.02	0.00	720	6.40	6.72	1290	0.90	1.78	1860	0.02	0.05
180	0.18	0.00	750	6.23	6.63	1320	0.75	1.51	1890	0.01	0.04
210	0.63	0.03	780	6.04	6.51	1350	0.67	1.28	1920	0.01	0.03
240	1.64	0.16	810	5.86	6.38	1380	0.58	1.10	1950	0.01	0.03
270	3.67	0.52	840	5.65	6.23	1410	0.50	0.94	1980	0.01	0.02
300	4.46	1.46	870	5.43	6.06	1440	0.42	0.81	2010	0.00	0.02
330	5.12	2.36	900	5.20	5.87	1470	0.36	0.69	2040	0.00	0.01
360	5.68	3.20	930	4.97	5.67	1500	0.29	0.59	2070	0.00	0.01
390	6.13	3.95	960	4.72	5.47	1530	0.24	0.50	2100	0.00	0.01
420	6.49	4.61	990	4.46	5.25	1560	0.19	0.42	2130	0.00	0.00
450	6.75	5.19	1020	4.19	5.02	1590	0.16	0.35	2160	0.00	0.00
480	6.92	5.67	1050	3.91	4.77	1620	0.12	0.29			
510	7.01	6.06	1080	3.48	4.53	1650	0.10	0.24			
540	7.03	6.35	1110	2.77	4.24	1680	0.08	0.20			

جدول (۱) مقادیر دبی های ورودی و خروجی مشاهداتی در بازه مورد مطالعه



شکل (۱) هیدروگراف سیلابهای ورودی و خروجی از بازه مورد مطالعه

شد.بدین منظور از معادله موج هارمونیک-پریودیک استفاده گردید و برای حل ابتدا آن را به یک معادله دیفرانسیلی جزئی تبدیل و سپس برای گسسته ساختن معادله حاکم از حل همزمان فرمهای explicit و implicit معادله استفاده شد. مقادیر اولیه ضرایب C و P نیز از طریق راه حل عددی معادله دیفرانسیلی جزئی تعیین شدند.و در نهایت از یک روش آماری برای تخمین این ضرایب برای یک بازه زمانی در آینده با استفاده از بازه های اندازه گیری شده موجود استفاده شد. نتایج اصلی که از این مطالعه حاصل شد عبارتند از:

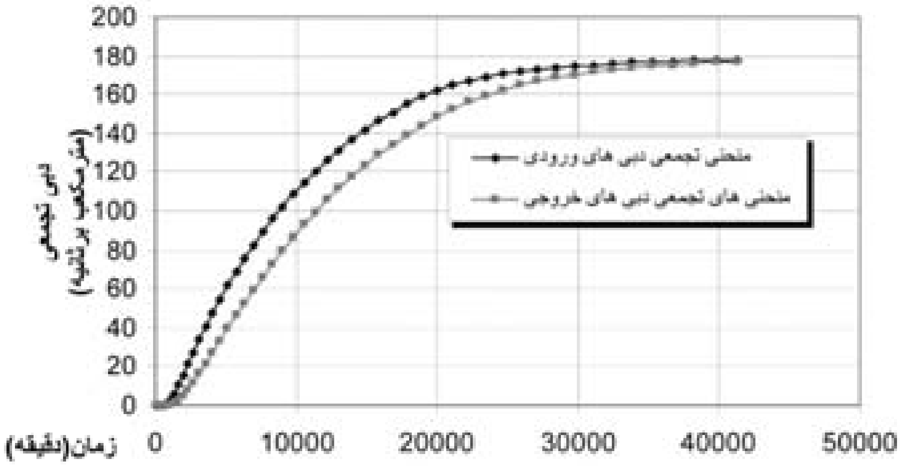
۱- معادله موج هارمونیک-پریودیک را می توان برای روندیابی سیل در رودخانه ها با یک دقت قابل قبول بکار برد. براساس نتایج بدست آمده می توان گفت که این روش علاوه بر صرف وقت و هزینه کمتر نسبت به مدلهای دیگر مانند مدل ماسکینگهام از دقت قابل قبولی برخوردار است.

۲- پروسه های تشریح شده برای تخمین ضرایب C و P بسیار دقیق هستند.

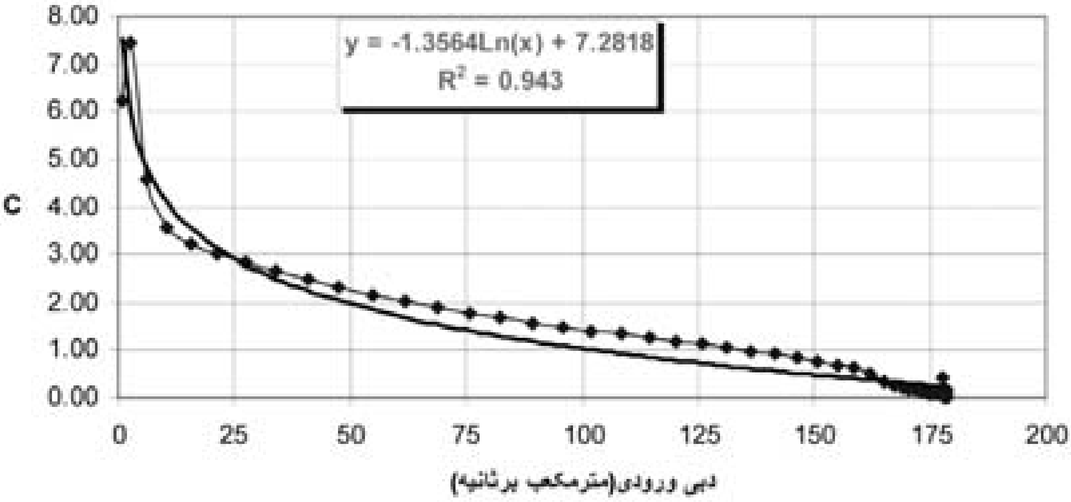
۳- این مدل برخلاف مدلهای هیدرولیکی روندیابی سیل ، نیاز به اطلاعات مشخصات هندسی مسیر عبور سیل

ندارد. همچنین برخلاف مدلهای روندیابی هیدرولوژیکی ،بخصوص روندیابی هیدرولوژیکی جریان در رودخانه، محاسبه ذخیره جریان در این مدل ،بصورت غیر خطی است.

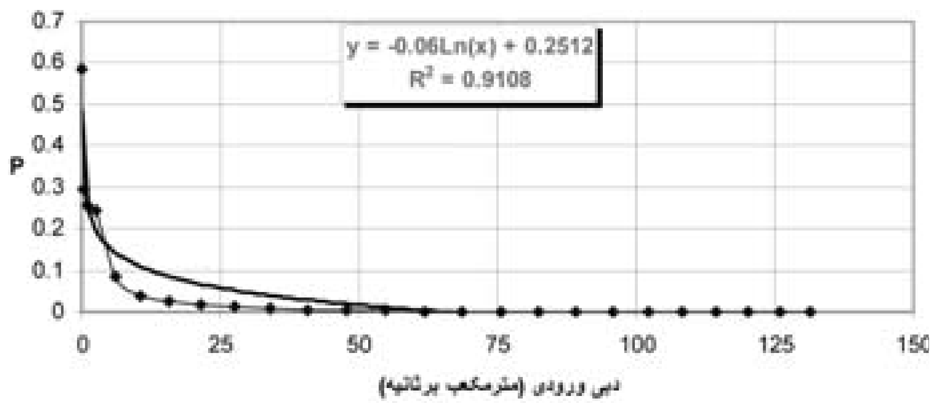
۴- حداکثر و متوسط خطای بدست آمده در روندیابی سیل به ترتیب برابر ۲/۹۶ و ۰/۵۳ درصد می باشد.



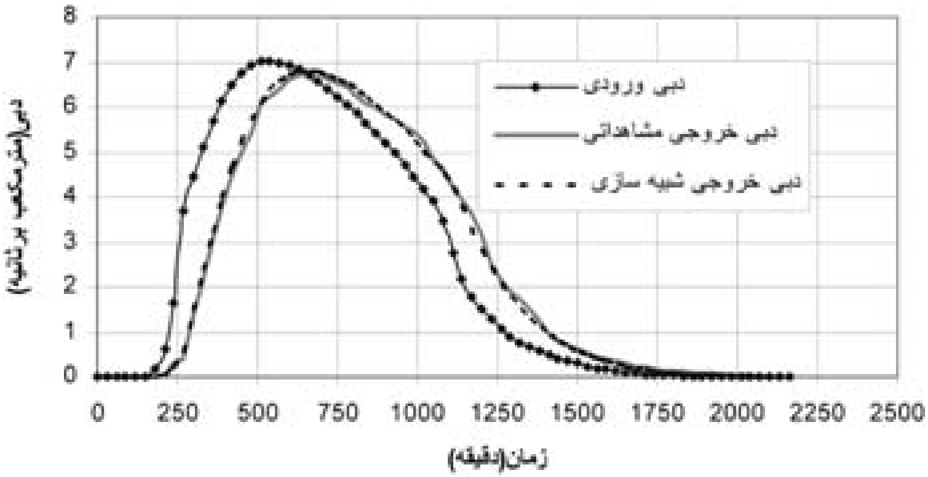
شکل (۲) استفاده از تابع تبدیل سیگما برای هیدروگرافهای ورودی و خروجی به منحنی های تجمعی



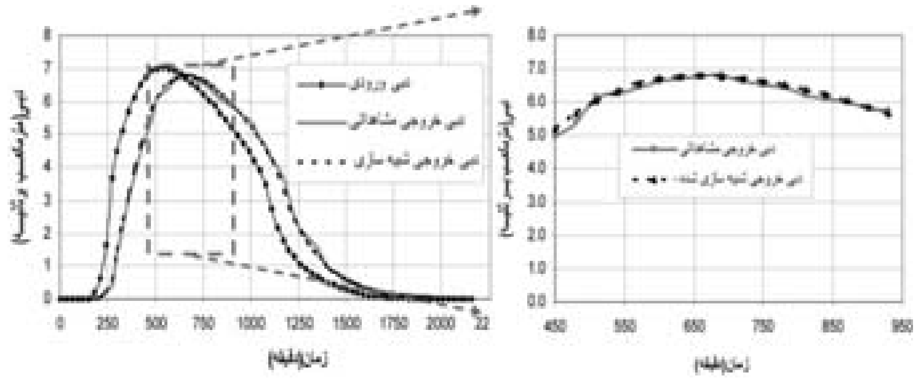
شکل (۳) رابطه بین ضریب C و مقادیر دبی ورودی به بازه مورد مطالعه از یک رودخانه



شکل (۴) رابطه بین ضریب P و مقادیر دبی ورودی به بازه مورد مطالعه از یک رودخانه



شکل (۵) بررسی صحت مدل با استفاده از یک مثال



شکل (۶) مقایسه هیدروگراف خروجی شبیه سازی شده با هیدروگراف خروجی مشاهداتی در بازه مورد مطالعه

منابع:

[۱] – دینامیک سیالات محاسباتی (جلد اول) –تالیف:ک.ا.هافمن و اس.تی.چیانگ – ترجمه: عظیمیان، احمدرضا
– انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان–چاپ دوم

[۲]– حبیبی–م و جواهری–ن، ۱۳۷۵، بررسی عوامل هیدرولیکی موثر بر سینوسی شدن رودخانه قزل اوزن،
جلد سوم–مدل ریاضی–مرکز تحقیقات حفاظت خاک و آبخیزداری–بخش مهندسی رودخانه– ۳۲۷ گ ن– ۱۶۲ صفحه

[۳]– حبیبی م، جواهری ن، مدل ریاضی پیش بینی فرسایش کناری در رودخانه های مئاندری،
نشریه علمی پژوهشی دانشکده فنی دانشگاه تهران، جلد ۳۷، شماره ۲، شهریور ۱۳۸۲، ص ۲۲۷–۲۳۴

[4] - salas,j.D.,J.W.Deller,V.,Yevjerich and N.L.Lane,1980,Applied modeling of hydrologic time series,Water Resource Publication,484pp.

[5] - Przedwojski,B.,R.Blazejewski andK.W.Pilarczyk,1995,River training technique,A.A.Balkema press,625pp

[6] - Leopold- L. B. & Wolman M.G., 1975, paper,River channel patterns; Braided, Meandering and Straight, US. Geological Survey, Prof. Paper No. 282, P. 39-85

[7] - Odgaard, A.J., 1989a, River meander model I: Development, Journal of Hydraulic Engineering, 115(9): 1433 -1450.

[8] - Javaheri N., Kashefi Pour S.M., Ghomeshi M., Application of the Harmonic-Periodic Wave for prediction of the morphology changes in the meandering rivers, 17Th canadian Hydrotechnical Conference , Aug 2005, P.269-278